

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LX. esztendő

2023-2024. tanév

II. forduló Megoldások

9. évfolyam

1. Igazolja, hogy $2023^2 + 2023^2 \cdot 2024^2 + 2024^2$ négyzetszám!

Megoldás

Végezzük el a következő helyettesítést $a = 2023$.

$$a^2 + a^2 \cdot (a+1)^2 + (a+1)^2 = a^2 + a^4 + 2a^3 + a^2 + a^2 + 2a + 1 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2$$

így $2023^2 + 2023^2 \cdot 2024^2 + 2024^2 = (2023^2 + 2023 + 1)^2$.

2. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2024$ függvény grafikonja és a két koordinátatengely által határolt derékszögű háromszöget! Hány rácspont helyezkedik el a háromszög belsejében? (Rácspontnak nevezzük az olyan pontokat, amelyek mindkét koordinátája egész szám.)

Megoldás

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2022 = \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 2\,045\,253.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha három 0-tól különböző szám összegének a reciproka egyenlő a számok reciprokértékeinek összegével, akkor van közöttük két olyan szám, amelyek összege 0.

Megoldás

Jelöljük a három számot a, b, c -vel!

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \text{ ahonnan}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} &= \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = \frac{(a+b)c(a+b+c) + (a+b)ab}{abc(a+b+c)} \\ &= \frac{(a+b)[c(a+b+c) + ab]}{abc(a+b+c)} = \frac{(a+b)(ac+bc+c^2+ab)}{abc(a+b+c)} \\ &= \frac{(a+b)[c(b+c) + a(c+b)]}{abc(a+b+c)} = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc(a+b+c)} = 0 \end{aligned}$$

Ez a tört csak úgy lehet 0, ha a számláló valamelyik tényezője, tehát $a+b$, $a+c$ vagy $b+c$ 0, amit bizonyítani kellett.

4. Milyen p prímszámokra lesz $p^2 + 2$ is prím?

Megoldás

$$p^2 + 2 = p^2 - 1 + 3 = (p - 1)(p + 1) + 3$$

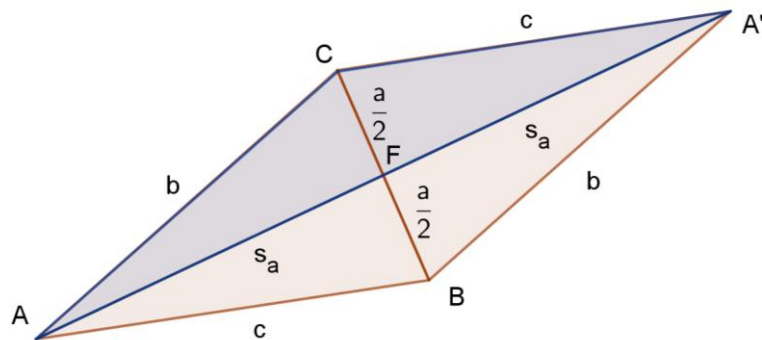
A $p - 1, p, p + 1$ számok közül az egyik osztható 3-mal, és ez csak akkor lehet p , ha $p = 3$, mivel p prím. Így, ha $p \neq 3$, akkor $p^2 + 2$ osztható 3-mal, és mivel nagyobb 3-nál, ezért nem prím. Ha $p = 3, p^2 + 2 = 11$, ez az egyetlen keresett alakú prímszám.

5. Az ABC háromszög súlyvonalainak hosszát jelölje rendre s_a, s_b, s_c , területének felét s . Bizonyítsa be, hogy $s < s_a + s_b + s_c < \frac{3s}{\sqrt{2}}$.

Megoldás

$$s_a + s_b + s_c < \frac{3s}{\sqrt{2}}$$

Az ABC háromszöget tükrözzük a BC oldal F felezőpontjára, s jelöljük A képét A' -vel.



Az $AA'C$ háromszögre fölírva a háromszögegyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$2s_a < b + c$$

Hasonló módon belátható, hogy

$$2s_b < a + c$$

$$2s_c < b + a$$

A három egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy

$$2s_a + 2s_b + 2s_c < 2a + 2b + 2c$$

$$s_a + s_b + s_c < a + b + c = 2s < \frac{3s}{\sqrt{2}}$$

amivel a bizonyítandó állításnál többet is bizonyítottunk.

$$s < s_a + s_b + s_c$$

Az AFC háromszögből a háromszögegyenlőtlenségből: $b - \frac{a}{2} < s_a$.

Az ABF háromszögből a háromszögegyenlőtlenségből: $c - \frac{a}{2} < s_a$.

E két egyenlőtlenséget összeadva: $b + c - a < 2s_a$.

Hasonló módon:

$$c + a - b < 2s_b.$$

$$a + b - c < 2s_c$$

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összegezve: $a + b + c = 2s < 2(s_a + s_b + s_c)$, amiből a keresett egyenlőtlenséget kapjuk.

6. Aladár, Béla és Csaba és feleségeik (nem feltétlenül azonos sorrendben!) Dóra, Enikő és Fanni. E hat személy életkorának összege 151 év. Mindegyik férj 5 évvel idősebb a feleségénél. Béla 1 évvel idősebb, mint Fanni; Enikő és Béla együtt 48 évesek; Csaba és Enikő életkorának összege 52 év.

Állapítsa meg, hogy ki hány éves, és ki kinek a házastársa! (A kérdéses életkorok egész számok.)

Megoldás

Béla felesége nem lehet Fanni, mert életkoruk különbsége 1 év. Béla felesége Enikő sem lehet, mert ha évszámaik összegéből 5-öt levonunk, akkor nem páros számot kapunk. Hasonló okból Csaba felesége sem lehet Enikő. Béla felesége tehát Dóra, Csaba felesége Fanni, Aladár felesége Enikő.

Ha Aladár, Béla, Csaba éveinek száma rendre x, y, z , akkor Enikő, Dóra, Fanni éveinek száma rendre $x - 5, y - 5, z - 5$.

A feladat feltételeiből adódik, hogy

1. $x + y + z + x - 5 + y - 5 + z - 5 = 151$, vagyis $x + y + z = 83$
2. $y - 1 = z - 5$, vagyis $y - z = -4$
3. $x + y - 5 = 48$, vagyis $x + y = 53$
4. $z + x - 5 = 52$, vagyis $z + x = 57$

A két utolsó összegéből az első kivonva kapjuk, hogy $x = 27$, így $z = 30, y = 26$, vagyis

Aladár 27, Enikő 22; Béla 26, Dóra 21; Csaba 30 és Fanni 25 éves.

10. évfolyam

1. Ha 10 839-et és 11 863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, mind a kétszer ugyanazt a maradékot kapjuk. Mennyi ez a maradék?

Megoldás

Jelölje a két számnak a háromjegyű h számmal vett osztási maradékát r ! Ez azt jelenti, hogy

$$10\,839 = a \cdot h + r$$

$$11\,863 = b \cdot h + r$$

ahol $a, b \in \mathbb{Z}$.

Vegyük a két szám különbségét!

$$1024 = 2^{10} = (b - a)h$$

h tehát 1024-nek egy 3-jegyű osztója, így 2-nek egy háromjegyű természetes kitevőjű hatványa. h tehát az alábbi számok valamelyike 128, 256, 512.

$$10839 = 84 \cdot 128 + 87$$

$$11863 = 92 \cdot 128 + 87$$

$$10839 = 42 \cdot 256 + 87$$

$$11863 = 46 \cdot 256 + 87$$

$$10839 = 21 \cdot 512 + 87$$

$$11863 = 23 \cdot 512 + 87$$

vagyis a keresett maradék 87.

2. Hány olyan egymáshoz nem hasonló háromszög van, amely tompaszögű, nem egyenlő szárú és mindegyik szögének mértéke fokokban mérve egész szám?

Megoldás

Hasonló háromszögek megfelelő szögei egyenlők, és ha két háromszög szögei páronként megegyeznek, akkor a két háromszög hasonló. Mivel tudjuk, hogy a háromszög szögeinek összege 180° , így a feladat a 180 három olyan különböző pozitív egész összeadandóra bontása, amelyek egyike 90-nél nagyobb.

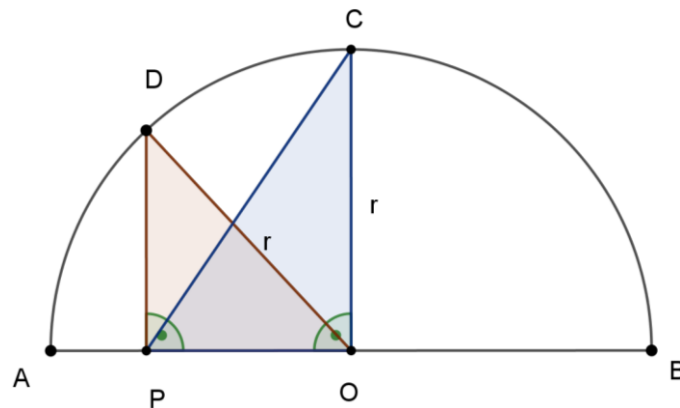
Elegendő a két hegyesszög értékét megadni, de úgy, hogy összegük legfeljebb 89 legyen, ez már egyértelműen meghatározza a harmadik szöget is. Mivel a két hegyesszög összege

legfeljebb 89 lehet. A kisebb szög értéke legfeljebb 44° . Jelöljük ezt α -val. A nagyobbik szög, melyet jelöljünk β -val, értéke $\alpha + 1^\circ$ -től $89^\circ - \alpha$ -ig változhat, tehát $(89 - \alpha) - \alpha = 89 - 2\alpha$ értéket vehet fel. Így, ha $\alpha = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 43^\circ, 44^\circ$, akkor β rendre 87, 85, 83, ..., 3, 1 különböző érték valamelyike lehet. Így az összes szóba jöhető háromszögek száma:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 83 + 85 + 87 = \frac{(1+87) \cdot 44}{2} = 44 \cdot 44 = 1936.$$

3. Egy r sugarú félkörív felezőpontja C , a félkörív egy tetszőleges D pontjának a merőleges vetülete az átmérőre P . Bizonyítsuk be, hogy $CP^2 + DP^2 = 2r^2$.

Megoldás



Legyen a félkör átmérője AB , középpontja O , ekkor $r = OC \perp AB$, így COP és DOP derékszögű háromszögekből mivel OD körsugár, Pitagorasz tétele alapján

$$r^2 + OP^2 = CP^2$$

$$r^2 = OP^2 + PD^2$$

A két egyenlőséget összeadva $2r^2 = CP^2 + PD^2$, amit bizonyítani kellett.

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a pozitív valós számok halmazán!

$$4^{3x} + 4^{\frac{1}{3x}} = 8$$

Megoldás

Mivel $x > 0$, ezért $4^{3x}; 4^{\frac{1}{3x}} > 0$. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség, valamint amiatt, mert egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, az egyenlet jobb oldala az alábbi módon becsülhető alulról:

$$4^{3x} + 4^{\frac{1}{3x}} \geq 2 \cdot \sqrt{4^{3x} \cdot 4^{\frac{1}{3x}}} = 2\sqrt{4^{3x+\frac{1}{3x}}} \geq 2\sqrt{4^2} = 8$$

Az első egyenlőtlenségénél az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $3x = \frac{1}{3x}$. Ennek az egyenletnek a pozitív megoldása az $x = \frac{1}{3}$, ami valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

5. Tekintsük az $x^2 - 2(p+1)x + 2p^2 + p - 1 = 0$ egyenletet, ahol p valós paramétert jelöl. Legyen $x_1; x_2$ az egyenlet két (nem feltétlenül különböző) valós megoldása. Állapítsuk meg az $y = 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét!

Megoldás

Az egyenlet megoldásai pontosan akkor valósak, ha diszkriminánsa nem negatív, azaz

$$D = (-2p - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2p^2 + p - 1) = -4p^2 + 4p + 8 \geq 0$$

ami akkor teljesül, ha $-1 \leq p \leq 2$.

$$y = 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2 \cdot (2p^2 + p - 1) - (2p + 2) = 4p^2 - 4$$

E kifejezés, akkor lesz minimális, ha $p = 0$. Ekkor y értéke: -4.

Mivel $-1 \leq p \leq 2$, ezért y akkor maximális, ha $p = 2$. Ekkor y értéke 12.

6. Egy egész együtthatós $p(x)$ polinom helyettesítési értéke öt különböző egész helyen 2023. Bizonyítsuk be, hogy $p(x)$ semmilyen egész x esetén sem veheti föl a 2025 értéket.

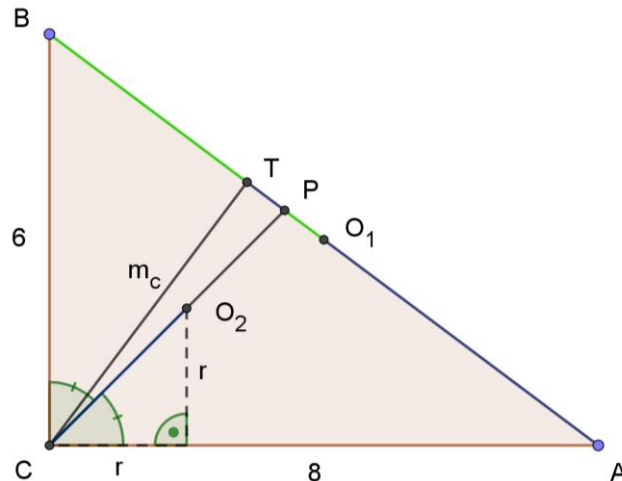
Megoldás

Legyenek x_i -k olyan különböző egész számok, amelyekre $p(x_i) = 2023$ (ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5$). Tételezzük föl, hogy létezik x_0 egész szám úgy, hogy $p(x_0) = 2025$. Ekkor minden x_i -re fennáll, hogy $x_0 - x_i | p(x_0) - p(x_i)$. Mivel i öt különböző értéket vehet föl és $p(x_0) - p(x_1) = 2$, ezért a 2-nek öt különböző osztója kellene, hogy legyen, ami ellentmondás.

11. évfolyam

1. Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza: $BC = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Jelölje a C csúcsból induló magasság talppontját T , a háromszög köré írt körének középpontját O_1 , és a beírt kör középpontját O_2 . Legyen P a C csúcsból induló szögfelező metszéspontja az AB átfogóval. Számítsuk ki az AO_1 , O_1P , TP , TB , O_2C , és a $d(O_2; AC)$ távolságokat.

Megoldás



A derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Mivel O_1 az átfogó felezőpontjával egyezik meg, ezért $AO_1=5$. A szögfelezőtétel miatt $PA=\frac{40}{7}$ cm és $PB=\frac{30}{7}$ cm, így $O_1P=PA - AO_1=\frac{5}{7}$ cm. A háromszög területét kétféleképpen felírva adódik, hogy $m_c=4,8$ cm. Így a TBC derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján adódik, hogy $TB=3,6$ cm. Ezért $TP = PB-TB=\frac{24}{35}$ cm. Az ABC háromszög beírt körének sugara a $T=rs$ képlet alapján 2 cm, ami megegyezik a $d(O_2; AC)$ távolsággal. Az O_2C átfogójú egyenlőszárú derékszögű háromszögből $O_2C=\sqrt{8}$ cm.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\overline{abc}$ háromjegyű szám osztható 37-tel, akkor a $\overline{bca}$ háromjegyű szám is osztható 37-tel. (A két számban az azonos betűk, azonos számjegyet jelölnek.)

Megoldás

A feladat feltétele szerint van olyan k egész szám, amelyre

$$\overline{abc} = k \cdot 37, \text{ tehát } \overline{bc} = 37k - 100a, \text{ így}$$

$$\overline{bca} = 10 \cdot \overline{bc} + a = 10(37k - 100a) + a = 370k - 999a = 37(10k - 27a)$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$(4^x + 25^x)(25^x + 49^x)(49^x + 4^x) = \frac{2}{1225} \cdot 4900^{x+1}$$

Megoldás

Az egyenlet jobboldalát átalakítva kapjuk, hogy $\frac{2}{1225} \cdot 4900^{x+1} = 8 \cdot 4900^x$.

Az egyenlet baloldalán lévő mindhárom tényezőt a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséggel becslve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (4^x + 25^x)(25^x + 49^x)(49^x + 4^x) &\geq 2 \cdot \sqrt{4^x \cdot 25^x} \cdot 2 \cdot \sqrt{25^x \cdot 49^x} \cdot 2 \cdot \sqrt{49^x \cdot 4^x} \\ &= 8 \cdot 10^x \cdot 35^x \cdot 14^x = 8 \cdot 4900^x \end{aligned}$$

ahol az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $4^x = 25^x = 49^x$. Így az eredeti egyenlet egyetlen megoldása $x = 0$.

4. Számítsuk ki az alábbi 44 tényezős szorzat számértékét.

$$(1 + \operatorname{tg} 1^\circ) \cdot (1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot (1 + \operatorname{tg} 3^\circ) \cdot \dots \cdot (1 + \operatorname{tg} 44^\circ)$$

Megoldás

$$\begin{aligned} & (1 + \operatorname{tg} 1^\circ) \cdot (1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot (1 + \operatorname{tg} 3^\circ) \cdot \dots \cdot (1 + \operatorname{tg} 44^\circ) = \\ &= \frac{\cos 1^\circ + \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{\cos 2^\circ + \sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \cdot \frac{\cos 3^\circ + \sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} \cdot \dots \cdot \frac{\cos 44^\circ + \sin 44^\circ}{\cos 44^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + 1^\circ)}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + 2^\circ)}{\cos 2^\circ} \cdot \dots \cdot \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + 44^\circ)}{\cos 44^\circ} = \\ &= \frac{2^{22} \sin 46^\circ \cdot \sin 47^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ}{\sin 89^\circ \cdot \sin 88^\circ \cdot \dots \cdot \sin 46^\circ} = 2^{22} \end{aligned}$$

5. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy pozitív egész szám páratlan osztóinak összege nagyobb legyen a páros osztói összegénél? (A választ indokolni kell.)

Megoldás

Páratlan számoknak csak páratlan osztói vannak, így a páratlan osztók összege mindig nagyobb a (nem létező) páros osztók összegénél.

Páros számok esetén bármelyik páratlan osztó kétszerese is osztója az eredeti számnak, így ebben az esetben páros osztók összege a nagyobb.

Vagyis egy pozitív egész szám páratlan osztóinak összege pontosan akkor nagyobb a páros osztók összegénél, ha a szám páratlan.

6. Egy 100 oldalú konvex sokszög belsejében nincs olyan pont, amelyen a sokszög kettőnél több átlója haladna át. Hány metszéspontja van a sokszög átlóinak a sokszög belsejében?

Megoldás

A sokszög csúcsai közül bármelyik négyet is választjuk ki, a hozzájuk tartozó átlók száma legfeljebb 6, ám ezek közül a konvexitás miatt csupán kettő átló metszi egymást a sokszög belsejében. Ugyanis a kiválasztott négy pont egy konvex négyszöget határoz meg, amelynél a

szemközti oldalpárokra illeszkedő egyenesek metszéspontjai a sokszögön kívül vannak, tehát kizárólag a négyszög két átlója metszi egymást a sokszög belsejében.

Tehát bármelyik négy csúcshoz tartozó átlók pontosan egy, a feladatnak megfelelő metszéspontot hoznak létre, amik mind különbözőek. Így annyi a feladatnak megfelelő metszéspont keletkezik, ahányféleképpen 100 csúcsból 4 csúcsot ki tudunk választani a sorrendre való tekintet nélkül, azaz $\binom{100}{4} = 3\,921\,225$.

12. évfolyam

1. Legyenek a, b, c valós paraméterek, és tegyük fel, hogy c pozitív. Határozzuk meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (c-2) \cdot x^2 + (a-x)^2 + (b-x)^2$ függvény szélsőértékét.

Megoldás

Elvégezve a kijelölt műveleteket f rendezett alakja:

$$f(x) = cx^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2.$$

Teljes négyzetté alakítás után

$$f(x) = c \left(x - \frac{a+b}{c} \right)^2 + a^2 + b^2 - \frac{(a+b)^2}{c}.$$

Mivel c pozitív, ezért f -nek minimuma van az $x_0 = \frac{a+b}{c}$ pontban, és a minimum értéke

$$f(x_0) = a^2 + b^2 - \frac{(a+b)^2}{c} = \frac{(c-1)(a^2 + b^2) - 2ab}{c}.$$

2. Mely számjegyekre nem végződhet a tízes számrendszerben az első n darab pozitív egész szám összege egyetlen pozitív egész n esetén sem? (A választ indokolni kell.)

Megoldás

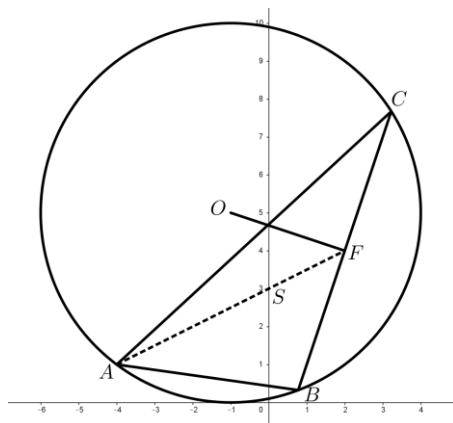
A jól ismert $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ összefüggést felhasználva, és n lehetséges végződéseinek függvényében az összeg végződéseit meghatározva kapjuk, hogy az első n darab pozitív egész szám összegének végződése 0, 1, 3, 5, 6, 8 lehet. Ezt figyelembe véve az összeg nem végződhet a 2, 4, 7, 9 számjegyekre.

3. A derékszögű koordináta-rendszerben egy háromszög egyik csúcsa $A(-4; 1)$, súlypontja $S(0; 3)$, köré írható körének középpontja $O(-1; 5)$. Számítsuk ki a háromszög másik két csúcsának koordinátáit, és írjuk fel oldalegyeneseinek egyenletét.

Megoldás

A háromszög köré írt kör sugara $r = OA = 5$, így egyenlete $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 25$. A BC oldal $F(f_1; f_2)$ felezőpontjára teljesül, hogy $\frac{AS}{SF} = 2$ (S az F -hez közelebbi harmadoló pontja az AF súlyvonalnak), ezért $\frac{2f_1-4}{3} = 0$ és $\frac{2f_2+1}{3} = 3$. Innen F koordinátái: $F(2; 4)$.

Az OF egyenes merőleges a BC oldalra, ezért $\overrightarrow{OF}(3; -1)$ a BC egyenes egy normálvektora. Az egyenes egyenletének normálvektoros alakját alkalmazva a BC egyenes egyenlete $3x - y = 2$ vagy más alakban $y = 3x - 2$.



A B és C csúcsok koordinátáit megkapjuk, ha megoldjuk a köré írt kör egyenletéből és a BC egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert:

$$(1) (x+1)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$(2) y = 3x - 2$$

Megoldva: $B\left(2 - \sqrt{\frac{3}{2}}; 4 - 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $C\left(2 + \sqrt{\frac{3}{2}}; 4 + 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

A B és C csúcsok ismeretében felírható az AB és AC oldalegyenesek egyenlete például az egyenes egyenletének irányvektoros alakját alkalmazva.

$$AB \text{ egyenlete: } \left(3 - 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)x - \left(6 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)y = 13\sqrt{\frac{3}{2}} - 18,$$

$$AC \text{ egyenlete: } \left(3 + 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)x - \left(6 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)y = -13\sqrt{\frac{3}{2}} - 18.$$

4. Az $ABCD$ tetraéder D csúcsba futó élei páronként merőlegesek egymásra. Egy P pontnak a tetraéder ABD , BCD , ACD lapjaitól vett távolsága megegyezik a kérdéses laphoz tartozó testmagasság harmadával. Mekkora a P pont és az ABC lap távolsága?

Megoldás

Jelölje DA , DB , DC élek hosszát rendre a , b , c . Mivel ezek az élek páronként merőlegesek egymásra, ezért a tetraéder térfogata $V = \frac{abc}{6}$.

A feladat feltételei alapján a térfogatot másképpen is felírhatjuk. Kössük össze a P pontot a tetraéder csúcsaival. Mivel a tetraéder derékszögű, ezért P -nek az ABD , BCD , ACD lapoktól

vett távolsága a feltétel szerint rendre $\frac{c}{3}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$. Legyen P -nek az ABC laptól vett előjeles távolsága x , amely pozitív, ha P belső pont, negatív, ha P külső pont, és 0, ha P illeszkedik az ABC síkra. A PA , PB , PC , PD szakaszok, pontosabban az általuk meghatározott síkok a tetraédert kisebb tetraéderekre bontják, így a térfogat felírható ezek összegeként is, azaz

$$V = \frac{bc}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{ac}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{T_{ABC} \cdot x}{3}.$$

A térfogat kétféle felírásának egyenlőségéből adódik, hogy $x = 0$, azaz a P pont a tetraéder ABC lapjára illeszkedik.

Megjegyzés: Belátható, hogy P az ABC háromszög súlypontja.

5. Legyen p 3-nál nagyobb prím. Igaz-e, hogy p darab egymást követő egész szám négyzetének összege osztható p -vel? (A választ indokolni kell.)

Megoldás

A válasz: igaz. Ezt fogjuk a továbbiakban bebizonyítani.

Legyen a p darab egymást követő egész szám a , $a+1$, $a+2$, ..., $a+p-1$. A négyzetösszeg:

$$\begin{aligned} S &= a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + \dots + (a+p-1)^2 = \\ &= a^2 p + 2a(1+2+\dots+p-1) + 1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2 = \\ &= a^2 p + ap(p-1) + \frac{p(p-1)(2p-1)}{6} \end{aligned}$$

A négyzetösszeg zárt alakra hozásánál felhasználtuk az első $p-1$ darab pozitív egész és az első $p-1$ darab négyzetszám összegére vonatkozó összefüggéseket.

Az összeg első két tagja osztható p -vel. Vizsgáljuk a harmadik tagot.

Mivel $\frac{p(p-1)(2p-1)}{6}$ egész szám, és p sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható, ezért $\frac{(p-1)(2p-1)}{6}$ is egész szám. Ezzel beláttuk az állítást.

6. Hány olyan páronként nem egybevágó téglatest létezik, amelyre igaz, hogy éleinek hossza adott egységben mérve pozitív egész szám, valamint felszíne és térfogata azonos számértékű?

Megoldás

Jelölje a téglatest egy csúcsba futó éleinek hosszát a , b , c . A feltétel alapján a

$$2(ab+bc+ca) = abc$$

egyenlet pozitív egész megoldásainak számát keressük. Nem jelent szűkítést, ha feltesszük, hogy $1 \leq a \leq b \leq c$.

Az egyenlet mindkét oldalát $2abc$ -vel osztva az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ egyenletet kapjuk. Az élhosszakra vonatkozó rendezési feltétel alapján könnyen látható, hogy $3 \leq a \leq 6$.

1. Ha $a = 3$, akkor $c = \frac{6b}{b-6} = 6 + \frac{36}{b-6}$. Mivel c pozitív egész, ezért $b-6$ osztója 36-nak, és a rendezési feltétel alapján $6 < b \leq 12$. Ez az eset 5 megfelelő megoldást (páronként nem egybevágó téglatestet) ad: (3; 7; 42), (3; 8; 24), (3; 9; 18), (3; 10; 15), (3; 12; 12).

2. Ha $a = 4$, akkor $c = \frac{4b}{b-4} = 4 + \frac{16}{b-4}$, ahol az előző esethez hasonlóan vizsgálódva $b-4$ osztója 16-nak, és $4 < b \leq 8$. Ebben az esetben 3 megfelelő megoldást kapunk: (4; 5; 20), (4; 6; 12), (4; 8; 8).

3. Ha $a = 5$, akkor a feltételek alapján b csak 5 vagy 6 lehet, és ezek közül csak $b = 5$ esetén lesz c pozitív egész. Itt tehát 1 megoldást kapunk: (5; 5; 10).

4. Ha $a = 6$, akkor szükségképpen $b = c = 6$, azaz ekkor 1 új megoldást (kocka) kapunk: (6; 6; 6).

Összesen 10 megfelelő téglatest van.